

Dynamika współoddziałujących cząstek

(Collective dynamics of interacting particles)

Autoreferat Rozprawy Doktorskiej

Jan Peszek

Matematyczny opis dynamiki współoddziałujących cząstek o nielokalnych oddziaływaniach pochodzi z jednego z podstawowych równań teorii kinetycznej - równania Własowa z 1938 roku. Okazuje się jednak, że tego typu modele umożliwiają opis szerokiego wachlarza zjawisk fizycznych, w których badane obiekty agregują pewne swoje wybrane cechy (takie jak np. położenie czy prędkość). Ze względu na te zastosowania matematyczny opis agregacji obecny jest dziś nie tylko w modelach stad zwierząt, ale również w badaniu pozornie niezwiązanych procesów takich jak powstawanie języków w kulturach pierwotnych, dystrybucja dóbr, czy osiąganie konsensusu w dyskusji (patrz [3, 31, 33, 42]). Literatura na temat tych modeli jest bardzo bogata, więc przedstawimy jedynie przykłady prac dotyczących najbardziej popularnych kierunków badań. Kierunki te to analiza asymptotyki czasowej (np. [27]) i tworzenia formacji (np. [26, 41]) oraz analiza modeli z dodatkowymi siłami symulującymi różnorodne czynniki naturalne (patrz np. [11, 20] dla sił deterministycznych lub [15] dla sił stochastycznych). W innych wariantach tego rodzaju modeli wprowadza się oddziaływania uniemożliwiające zderzenia cząstek (np. [13]) lub rozważa się agregację pod przywództwem określonego wcześniej lidera (np. [14]). Przykładem pracy, w której wykonano gruntowną analizę modelu zawierającego efekty przyciągania, odpychania i wyrównywania prędkości jest [7]. Ogólna postać równań związanych z kinetycznymi modelami dynamiki współoddziałujących cząstek przedstawia się następująco:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla f + \operatorname{div}_v[(k * f)f] = 0, \quad (1)$$

gdzie funkcja $f = f(x, v, t)$ jest zazwyczaj interpretowana jako gęstość/rozkład cząstek które w czasie t znajdują się w pozycji x z prędkością v . Funkcja k jest jądrem potencjału generującego ruch. Jest ona odpowiedzialna za nielocalne oddziaływanie międzycząsteczkowe i w zależności od jej własności cząstki mogą przejawiać różnorodne tendencje (np. mogą się przyciągać, odpychać, wyrównywać swoje prędkości itp.). Typową własnością wymaganą w modelach od jądra k jest lipschitzowskość i ograniczoność, które są warunkiem stosowania wielu standardowych metod równań różniczkowych cząstkowych. Na przykład jeśli k jest lipschitzowska i ograniczona, wówczas układ cząstek powiązany z równaniem (1) jest dobrze postawiony, metoda charakterystyk może być stosowana i na ogół przejście z układu cząstek do równania kinetycznego nie nastrocza trudności. Głównym celem niniejszej rozprawy jest analiza modeli postaci (1) z osobliwym jądrem k i zmodyfikowanie standardowej metody granicy pola średniego tak, by działała również w tej sytuacji. Zajmujemy się tym zagadnieniem w szczególnym przypadku modelu Cuckera–Smale’a (C–S).

Model Cuckera–Smale’a. W pracy [16] z 2007 roku, Cucker i Smale zaproponowali

model formowania się stad ptaków powiązany z następującym układem równań zwyczajnych:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_i &= v_i, \\ \frac{d}{dt}v_i &= \sum_{j=1}^N m_j(v_j - v_i)\psi(|x_j - x_i|), \end{cases} \quad (2)$$

gdzie N jest liczbą cząstek zaś $x_i(t)$, $v_i(t)$ oraz m_i to odpowiednio: położenie i prędkość i -tej cząstki w czasie t oraz jej masa. Funkcja $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ zwana zazwyczaj *wagą komunikacyjną* jest nieujemna i nierosnąca. Może ona być interpretowana jako percepcja cząstek. Waga komunikacyjna pełni kluczową rolę w naszych badaniach, więc poświęcimy jej więcej uwagi później. Będziemy nazywać układ (2) *układem cząstek C–S* bądź *dyskretnym modelem C–S* (pomijając czasem „C–S”).

Gdy $N \rightarrow \infty$ układ cząstek zastąpiony jest następującym równaniem typu Własowa:

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \cdot \nabla f + \operatorname{div}_v[F(f)f] &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad v \in \mathbb{R}^d, \\ F(f)(x, v, t) &:= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(|y - x|)(w - v)f(y, w, t)dw dy, \end{aligned} \quad (3)$$

które może być odczytane jako (1) dla $k(x, v) = v\psi(|x|)$. Jak już zostało wspomniane, zajmujemy się równaniem (3) z osobliwą wagą komunikacyjną postaci

$$\psi(s) = \begin{cases} s^{-\alpha} & \text{for } s > 0, \\ \infty & \text{for } s = 0, \end{cases} \quad \alpha > 0. \quad (4)$$

Będziemy nazywać równanie (3) *kinetycznym równaniem C–S, równaniem typu Własowa C–S* bądź *modelem ciągłym C–S* (pomijając czasem „C–S”).

Historia modelu C–S rozpoczyna się w 1995 roku pracą [43], w której zaprezentowano pewien model powstawania stad, który uchodzi za inspirację dla modelu C–S z pracy [16]. Waga komunikacyjna zaproponowana przez Cuckera i Smale’a miała postać

$$\psi_{cs}(s) = \frac{K}{(1 + s^2)^{\frac{\beta}{2}}}, \quad \beta \geq 0, \quad K > 0, \quad (5)$$

zaś model z tą wagą został gruntownie przeanalizowany w kierunkach podobnych do wspomnianych wcześniej kierunków badań dla ogólniejszych modeli dynamiki współoddziałujących cząstek (tj. unikanie zderzeń, dynamika z wyszczególnionym liderem, asymptotyka i tworzenie formacji, itd. – patrz [2, 10, 25, 28, 35, 40]). Na szczególną uwagę z punktu widzenia niniejszej rozprawy zasługuje problem przejścia granicznego z układu (2) do równania kinetycznego (3), które w przypadku regularnej wagi komunikacyjnej zostało wykonane np. w pracach [29] i [30]. Bardziej ogólne spojrzenie na zagadnienie przejścia z mikroskopowego do mezoskopowego i makroskopowego opisu w modelach postaci (1) można znaleźć w pracach [8, 17, 18]. Model C–S z osobliwą wagą komunikacyjną został zaprezentowany w 2009 roku w pracy [29], a główny wkład w jego analizę pochodzi z prac [1, 9, 36, 37].

Główny rezultat. Głównym celem niniejszej rozprawy jest udowodnienie, że dla każdego $T > 0$ i każdej nieujemnej miary Radona f_0 wziętej jako dane początkowe równanie typu Własowa C–S (3) z osobiłą wagą komunikacyjną postaci (4) ma rozwiązania w przedziale $[0, T]$, przy założeniu, że osobiłość nie przekracza 1 (tj. $\alpha \in (0, 1)$).

Przedstawimy teraz ogólną strategię dowodową. Jest rzeczą naturalną oczekiwać, że analiza (zarówno jakościowa jak i ilościowa) układu cząstek (2) jest łatwiejsza niż analiza przypadku ciągłego. Wobec tego określamy rozwiązania równania (3) poprzez aproksymację rozwiązaniami (2) przy liczbie cząstek N rozbijanej do nieskończoności. Stosujemy metodę granicy pola średniego. Mając nieujemną miarę Radona $f_0 = f_0(x, v)$ jako dane początkowe ($x \in \mathbb{R}^d$ i $v \in \mathbb{R}^d$) rozbijamy jej nośnik na przystające kostki $Q_{i,\epsilon} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ o średnicy $\epsilon > 0$ (środki kostek, oznaczone jako $(x_{i,\epsilon}, v_{i,\epsilon})$, wyznaczają kratę o boku ϵ na nośniku f_0). W środku każdej z kostek kładziemy deltę Diraca o masie $m_{i,\epsilon}$ równej masie f_0 obciętej do danej kostki tj.

$$m_{i,\epsilon} := \int_{Q_{i,\epsilon}} f_0(x, v) dx dv.$$

W ten sposób, przez N_ϵ oznaczając liczbę kostek, otrzymujemy

$$f_{0,\epsilon} := \sum_{i=1}^{N_\epsilon} m_{i,\epsilon} \delta_{x_{i,\epsilon}} \otimes \delta_{v_{i,\epsilon}},$$

co, jak udowodnimy, zbiega¹ do f_0 przy $\epsilon \rightarrow 0$. Z drugiej strony, możemy patrzeć na delty Diraca $m_{i,\epsilon} \delta_{x_{i,\epsilon}} \otimes \delta_{v_{i,\epsilon}}$ jako na określenie warunku początkowego dla cząstek w układzie (2), gdzie $x_{i,\epsilon}$, $v_{i,\epsilon}$ i $m_{i,\epsilon}$ określają odpowiednio położenie, prędkość i masę i -tej cząstki. Wówczas rozwiązanie układu cząstek (oznaczymy je przez (x_ϵ, v_ϵ)) może być znów zinterpretowane jako funkcja o wartościach w miarach f_ϵ określona na przedziale czasowym $[0, T]$. Następnie zbiegamy z $\epsilon \rightarrow 0$ mając nadzieję móc wybrać podciąg zbieżny do pewnej funkcji o wartościach w miarach f , która posłuży za kandydata na rozwiązanie równania (3). Strategia ta jest stosowana np. w pracy [29], w której autorzy dowodzą dobrego postawienia zagadnienia (3) z regularną wagą komunikacyjną. Jednakże opierają oni swoje rozumowanie na dobrym postawieniu zagadnienia (2), które sprawia, że otrzymanie zbieżności przybliżonych rozwiązań f_ϵ jest stosunkowo łatwe. Z drugiej strony, w przypadku wagi osobiwej, jest niewielka szansa na to, że układ (2) jest dobrze postawiony, co z kolei czyni przejście graniczne przy $\epsilon \rightarrow 0$ główną trudnością zagadnienia.

Realizacja powyższej strategii przebiega następująco.

Na początku skupiamy się na kwestii istnienia rozwiązań dla układu (2) z osobiwością $\alpha \in (0, 1)$. Dowodzimy, że dla każdych danych początkowych w postaci skończonej liczby cząstek istnieje *kawałkami słabe*² rozwiązanie o różnych przydatnych strukturalnych własnościach. Dajemy również przykład rozwiązania, którego trajektorie sklejają się w czasie

¹W topologii generowanej przez metrykę flat (ang. *flat metric* lub *bounded-Lipschitz distance*).

²Dokładna definicja kawałkami słabych rozwiązań jest dość skomplikowana, więc pozostawiamy ją w treści rozprawy.

skończonym (zjawisko to nie występuje w przypadku wagi regularnej). Wyniki te można podsumować następująco.

Twierdzenie 1. *Niech $\alpha \in (0, 1)$. Dla wszystkich $T > 0$ i dowolnych danych początkowych istnieje kawałkami słabe rozwiązanie układu (2) należące do $(C^1([0, T]))^{Nd}$.*

Stwierdzenie 1. *Układ cząstek C–S (2) z osobliwą wagą komunikacyjną (4) o osobliwości $\alpha \in (0, 1)$ dopuszcza sklejanie się trajektorii cząstek w skończonym czasie.*

Kolejnym krokiem jest wzmocnienie Twierdzenia 1. Przy ograniczeniu dopuszczalnej osobliwości do $(0, \frac{1}{2})$ otrzymujemy istnienie i jednoznaczność silnych rozwiązań układu cząstek (2). Jest to najbliższy dobremu postawieniu wynik dla układu cząstek C–S z osobliwą wagą komunikacyjną (kwestia ciągłej zależności od danych początkowych pozostaje nadal otwarta). Prezentujemy go w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Niech $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ będzie dane. Wówczas dla każdego $T > 0$ i dla dowolnych danych początkowych istnieje jednoznaczne $x \in W^{2,1}([0, T]) \subset C^1([0, T])$, rozwiązanie układu (2) z wagą komunikacyjną postaci (4) słabo w $W^{2,1}([0, T])$.*

Dodatkowo dowodzimy, że wspomniane w Twierdzeniu 1, kawałkami słabe rozwiązania są jednoznaczne dla $\alpha \in (0, 1)$.

Twierdzenie 3. *Niech $\alpha \in (0, 1)$ będzie dane. Wówczas kawałkami słabe rozwiązanie układu (2), którego istnienie wynika z Twierdzenia 1, jest jednoznaczne.*

W dalszym ciągu rozprawy stosujemy uprzednio uzyskane wyniki (w szczególności Twierdzenie 2) w celu uzyskania istnienia dla równania kinetycznego (3) z osobliwą wagą dla $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. Przyjmujemy prezentowaną wcześniej strategię wykorzystującą granicę pola średniego. Ograniczenie dopuszczalnej osobliwości do przedziału $(0, \frac{1}{2})$ pochodzi wyłącznie z założeń Twierdzenia 2 i powinno być rozumiane następująco: aby uzyskać istnienie dla równania kinetycznego metodą pola średniego wymagana jest odpowiednia regularność rozwiązań układu cząstek, która zapewnia zwartość ciągu aproksymacyjnego. Innymi słowy, nasza metoda działa, jeśli tylko rozwiązania układu cząstek są dostatecznie regularne.

Twierdzenie 4. *Niech $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Dla każdej nieujemnej miary Radona f_0 o zwartym nośniku i dla każdego $T > 0$ kinetyczne równanie Cuckera-Smale’a (3) ma rozwiązanie³ f będące funkcją o wartościach w miarach. Co więcej, jeśli tylko f_0 jest atomowa⁴, to rozwiązanie f jest atomowe i jednoznaczne.*

Dynamika cząstek zanurzonych w płynie. Jednym z innych interesujących kierunków badań jest analiza dynamiki cząstek (opisanych za pomocą modelu postaci (1)) w ich naturalnym środowisku. Rolę takiego środowiska może pełnić płyn. Wobec powyższej motywacji prowadzone są badania nad sprzęganiem modeli kinetycznych z hydrodynamicznymi

³Dokładna definicja rozwiązania znajduje się treści rozprawy.

⁴Przez „atomową” rozumiemy miarę będącą sumą delt Diraca.

(patrz [4–6, 12, 22–24]). Z punktu widzenia niniejszej rozprawy na szczególną uwagę zasługuje praca [6], w której badano układ Naviera–Stokesa (N–S) sprzężony z równaniem Własowa oraz praca [4], w której metody z [6] zostały zaadoptowane w celu sprzężenia układu N–S z kinetycznym równaniem C–S (w przypadku regularnej wagi komunikacyjnej). Drugim celem niniejszej rozprawy jest zmodyfikowanie metod z prac [6] i [4] w celu sprzężenia modelu C–S z równaniami płynów nienewtonowskich.

Naszym celem jest analiza ruchu cząstek zanurzonych w nieściśliwym, lepkiem, nienewtonowskim płynie, a zatem sprzęgamy (2) z układem

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi - \operatorname{div}(\tau) &= f_{ext}, \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{cases} \quad (6)$$

opisującym dynamikę takiego płynu w \mathbb{R}^d . Funkcja

$$u = u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_d(t, x))$$

reprezentuje prędkość płynu znajdującego się w punkcie x w czasie t . Równanie $(6)_2$ wyraża zachowanie masy podczas gdy równanie $(6)_1$ wyraża zachowanie pędu. Występujący w równaniu $(6)_1$ czynnik τ określa symetryczny tensor naprężeń zależny od Du – symetrycznej części gradientu u tj. $\tau = \tau(Du)$, gdzie $Du = \frac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T]$. W naszych rozważaniach zakładamy, że τ pochodzi od skalarnego potencjału ϑ i poprzez założenie pewnych własności ϑ wymuszamy na τ spełnianie różnorodnych własności takich jak p -wzrost (dla pewnego $p > 1$), czy koercytywność. Funkcja f_{ext} reprezentuje siłę zewnętrzną.

Sprzęganie (2) z (6) wykonane jest za pomocą tzw. siły oporu (and. *drag force*)

$$F_d(t, x, v) := u(t, x) - v,$$

która oddziałuje zarówno na cząstki jak i na płyn. Ten sposób sprzęgania pochodzi z prac [6] i [4], choć oryginalnie stosowany był do modelowania cienkich warstw płynów (patrz np. [5, 6, 22–24]). Układ sprzężony prezentuje się następująco:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \nabla f + \operatorname{div}_v[(F(f) + F_d)f] &= 0, \quad x \in \mathbb{T}^d, \quad v \in \mathbb{R}^d, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla \pi - \operatorname{div}(\tau(Du)) &= -d \int_{\mathbb{R}^d} F_d f dv, \quad x \in \mathbb{T}^d, \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{cases} \quad (7)$$

Przedyskutujmy pokrótce różnice pomiędzy sprzęganiem modelu C–S z modelami płynów newtonowskich i nienewtonowskich. W pracach [6] i [4], autorzy uzyskali słabe istnienie dla układów sprzężonych. W szczególności wykazanie istnienia silnych rozwiązań i jednoznaczności dla sprzężonych modeli N-S-Własowa czy N-S-C-S było niezbyt realne bez uprzedniego wykazania regularności i jednoznaczności dla układu N-S. Inaczej niż w przypadku sprzęgania z równaniami płynów nienewtonowskich, dla których istnienie, regularność i jednoznaczność zależą od wartości parametru p i regularności siły zewnętrznej f_{ext} . Dla układu

(6) słabe istnienie jest znane dla $p > \frac{2d}{d+2}$ i $f_{ext} \in (W^{1,p})^*$. Otrzymuje je się stosując metodę obcięć lipschitzowskich (and *Lipschitz truncation*, patrz np. [19, 21]). Z drugiej strony jeśli $p \geq \frac{3d+2}{d+2}$ i $f_{ext} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^d))$, mamy nie tylko istnienie silnych rozwiązań, ale również jednoznaczność (patrz np. [39]). Wobec tego, możemy oczekiwać istnienia jednoznacznych, silnych rozwiązań dla układu (7). Zależy to jednak od wartości p i struktury siły zewnętrznej, równej w tym przypadku

$$f_{ext} = -d \int_{\mathbb{R}^d} (u - v) f dv.$$

Co więcej dla $p \in (\frac{2d}{d+2}, \frac{3d+2}{d+2})$ w przypadku układu sprzężonego wydaje się, że kombinacja naszych metod z metodą troncacji lipschitzowskich może prowadzić do otrzymania istnienia słabych rozwiązań. Jest to jednak problem spoza zakresu tematyki niniejszej rozprawy.

Strategia dowodowa, którą będziemy stosować pochodzi z pracy [6] i będzie zastosowana przy użyciu wyników pochodzących z prac [4, 32, 39]. Najpierw wygładzamy układ, żeby następnie uzyskać istnienie dla wygładzonego układu. Istnienie to uzyskujemy wprowadzając następujący program indukcyjny: rozwiązujemy na przemian równania $(7)_1$ i $(7)_2$ wprowadzając rozwiązania z poprzednich iteracji jako dane funkcje służące wyznaczeniu kolejnych iteracji. Następnie dzięki drobiazgowej technicznej analizie i oszacowaniom dowodzimy zbieżności tak powstałego ciągu iteracyjnego.

Zastosowanie powyższej strategii prowadzi do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5. Niech $d = 3$, $p \geq \frac{11}{5}$ oraz $T > 0$. Załóżmy ponadto, że dane początkowe (f_0, u_0) spełniają założenia

1. $0 \leq f_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$, $\text{supp } f_0(x, \cdot) \subset B(R)$ dla pewnego $R > 0$ i p.w. $x \in \mathbb{T}^3$, gdzie $B(R)$ jest kulą o środku w 0 i promieniu R ,
2. $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^3) \cap L^2_{div,0}(\mathbb{T}^3)$,
3. $\nabla_v f_0 \in L^3(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Wówczas istnieje jednoznaczne silne rozwiązanie układu (7).

W powyższym twierdzeniu $L^2_{div,0}$ oznacza bezdywergencyjną podprzestrzeń przestrzeni $L^2(\mathbb{T}^3)$.

Konkluzje. Niniejsza rozprawa przedstawia mój wkład w rozwój teorii istnienia dla modelu C–S z osobliwą wagą komunikacyjną. Przyświecającą jej ideą jest wykonanie pierwszych kroków w kierunku zweryfikowania czy układ ten jest dobrze postawiony. Od początku pracy w 2014 roku udało się uzyskać pierwsze wyniki dotyczące:

- istnienia kawałkami słabych rozwiązań układu cząstek C–S dla osobliwości $\alpha \in (0, 1)$, opublikowane w [36];

- istnienia i jednoznaczności silnych rozwiązań układu cząstek C–S dla osobliwości $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, opublikowane w [37];
- istnienia i warunkowej jednoznaczności rozwiązań kinetycznego równania C–S dla osobliwości $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, zawarte w preprincie [34];
- możliwości sklejanie się trajektorii cząstek, opublikowane w [36].

Są to pierwsze wyniki dotyczące istnienia dla modelu C–S z osobliwą wagą komunikacyjną z $\alpha \in (0, 1)$ i jedne z pierwszych kroków w kierunku zweryfikowania czy jest to układ dobrze postawiony, co jest wynikiem istotnym z punktu widzenia zastosowań i analizy numerycznej. Ze względu na braki w znanej teorii należało wprowadzić stosunkowo nowe (często elementarne) techniki i istotnie zmodyfikować te istniejące. Analiza układu cząstek została wykonana przy użyciu metod wywodzących się z podstawowych technik teorii układów równań różniczkowych zwyczajnych. Z drugiej strony analiza równania kinetycznego została wykonana poprzez przejście graniczne między opisem mikroskopowym i mezoskopowym. Przejście to wymagało znacznie bardziej wyrafinowanych metod: pochodząca z analizy stochastycznej układów wielu ciał, granica pola średniego została wykorzystana do określenia rozwiązania równania kinetycznego jako granicy rozwiązań układów cząstek. Topologia, w której przejście graniczne zostało wykonane była generowana przez metrykę Wassersteina W_1 (czasem nazywaną metryką Kantorowicza-Rubinsteina). W celu zastosowania tej metody w przypadku wagi osobliwej należało uprzednio istotnie ją zmodyfikować.

Dodatkowo uzyskaliśmy

- istnienie i jednoznaczność silnych rozwiązań równania kinetycznego C–S z regularną wagą komunikacyjną sprzężonego z równaniem płynu nienewtonowskiego. Wynik ten oparty jest na metodach z prac [6] i [4] połączonych z wynikami z pracy [39] i książki [32] i zawarta jest w preprincie [38].

Literatura

- [1] S. M. Ahn, H. Choi, S.-Y. Ha, and H. Lee. On collision-avoiding initial configurations to Cucker-Smale type flocking models. *Commun. Math. Sci.*, 10(2):625–643, 2012.
- [2] S. M. Ahn and S.-Y. Ha. Stochastic flocking dynamics of the Cucker-Smale model with multiplicative white noises. *J. Math. Phys.*, 51(10):103301, 17, 2010.
- [3] G. Albi, M. Herty, and L. Pareschi. Kinetic description of optimal control problems and applications to opinion consensus. *Commun. Math. Sci.*, 13(6):1407–1429, 2015.
- [4] H.-O. Bae, Y.-P. Choi, S.-Y. Ha, and M.-J. Kang. Time-asymptotic interaction of flocking particles and an incompressible viscous fluid. *Nonlinearity*, 25(4):1155–1177, 2012.
- [5] C. Baranger and L. Desvillettes. Coupling Euler and Vlasov equations in the context of sprays: the local-in-time, classical solutions. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 3(1):1–26, 2006.

- [6] L. Boudin, L. Desvillettes, C. Grandmont, and A. Moussa. Global existence of solutions for the coupled Vlasov and Navier-Stokes equations. *Differential Integral Equations*, 22(11-12):1247–1271, 2009.
- [7] J. A. Cañizo, J. A. Carrillo, and J. Rosado. A well-posedness theory in measures for some kinetic models of collective motion. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 21(3):515–539, 2011.
- [8] J. A. Carrillo, Y.-P. Choi, and M. Hauray. The derivation of swarming models: Mean-field limit and wasserstein distances. *arXiv:1304.5776*, preprint, 2013.
- [9] J. A. Carrillo, Y.-P. Choi, and H. M. Local well-posedness of the generalized Cucker-Smale model. *pre-print*, arXiv:1406.1792, 2014.
- [10] J. A. Carrillo, M. Fornasier, J. Rosado, and G. Toscani. Asymptotic flocking dynamics for the kinetic Cucker-Smale model. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(1):218–236, 2010.
- [11] J. A. Carrillo, A. Klar, S. Martin, and S. Tiwari. Self-propelled interacting particle systems with roosting force. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(suppl. 1):1533–1552, 2010.
- [12] P. Constantin and G. Seregin. Global regularity of solutions of coupled Navier-Stokes equations and non-linear Fokker Planck equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 26(4):1185–1196, 2010.
- [13] F. Cucker and J.-G. Dong. Avoiding collisions in flocks. *IEEE Trans. Automat. Control*, 55(5):1238–1243, 2010.
- [14] F. Cucker and C. Huepe. Flocking with informed agents. *MathS in Action*, 1(1):1–25, 2008.
- [15] F. Cucker and E. Mordecki. Flocking in noisy environments. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 89(3):278–296, 2008.
- [16] F. Cucker and S. Smale. Emergent behavior in flocks. *IEEE Trans. Automat. Control*, 52(5):852–862, 2007.
- [17] P. Degond and S. Motsch. Macroscopic limit of self-driven particles with orientation interaction. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345(10):555–560, 2007.
- [18] P. Degond and S. Motsch. Continuum limit of self-driven particles with orientation interaction. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(suppl.):1193–1215, 2008.
- [19] L. Diening, J. Málek, and M. Steinhauer. On Lipschitz truncations of Sobolev functions (with variable exponent) and their selected applications. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 14(2):211–232, 2008.
- [20] R. Duan, M. Fornasier, and G. Toscani. A kinetic flocking model with diffusion. *Comm. Math. Phys.*, 300(1):95–145, 2010.
- [21] J. Frehse, J. Málek, and M. Steinhauer. On analysis of steady flows of fluids with shear-dependent viscosity based on the Lipschitz truncation method. *SIAM J. Math. Anal.*, 34(5):1064–1083 (electronic), 2003.
- [22] T. Goudon, L. He, A. Moussa, and P. Zhang. The Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system near equilibrium. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(5):2177–2202, 2010.
- [23] T. Goudon, P.-E. Jabin, and A. Vasseur. Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations. I. Light particles regime. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(6):1495–1515, 2004.
- [24] T. Goudon, P.-E. Jabin, and A. Vasseur. Hydrodynamic limit for the Vlasov-Navier-Stokes equations. II. Fine particles regime. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(6):1517–1536, 2004.
- [25] S.-Y. Ha, T. Ha, and J.-H. Kim. Asymptotic dynamics for the Cucker-Smale-type model with the Rayleigh friction. *J. Phys. A*, 43(31):315201, 19, 2010.
- [26] S.-Y. Ha, E. Jeong, J.-H. Kang, and K. Kang. Emergence of multi-cluster configurations from attractive and repulsive interactions. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 22(8):1250013, 42, 2012.

- [27] S.-Y. Ha, M.-J. Kang, C. Lattanzio, and B. Rubino. A class of interacting particle systems on the infinite cylinder with flocking phenomena. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 22(7):1250008, 25, 2012.
- [28] S.-Y. Ha, K. Lee, and D. Levy. Emergence of time-asymptotic flocking in a stochastic Cucker-Smale system. *Commun. Math. Sci.*, 7(2):453–469, 2009.
- [29] S.-Y. Ha and J.-G. Liu. A simple proof of the Cucker-Smale flocking dynamics and mean-field limit. *Commun. Math. Sci.*, 7(2):297–325, 2009.
- [30] S.-Y. Ha and E. Tadmor. From particle to kinetic and hydrodynamic descriptions of flocking. *Kinet. Relat. Models*, 1(3):415–435, 2008.
- [31] V. Loreto and L. Steels. Social dynamics: Emergence of language. *Nature Physics*, 3:758–760, 2007.
- [32] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, and M. Ružička. *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs*, volume 13 of *Applied Mathematics and Mathematical Computation*. Chapman & Hall, London, 1996.
- [33] S. Motsch and E. Tadmor. Heterophilous dynamics enhances consensus. *SIAM Rev.*, 56(4):577–621, 2014.
- [34] P. B. Mucha and J. Peszek. The cucker-smale equation: singular communication weight, measure solutions and weak-atomic uniqueness. *preprint*, arXiv:1509.07673v1, 2015.
- [35] J. Park, H. J. Kim, and S.-Y. Ha. Cucker-Smale flocking with inter-particle bonding forces. *IEEE Trans. Automat. Control*, 55(11):2617–2623, 2010.
- [36] J. Peszek. Existence of piecewise weak solutions of a discrete Cucker–Smale’s flocking model with a singular communication weight. *J. Differential Equations*, 257(8):2900–2925, 2014.
- [37] J. Peszek. Discrete cucker-smale flocking model with a weakly singular weight. *SIAM J. Math. Anal.*, to appear, 2015.
- [38] J. Peszek. Flocking particles in a non-newtonian shear thickening fluid. *preprint*, to be submitted, 2016.
- [39] M. Pokorný. Cauchy problem for the non-Newtonian viscous incompressible fluid. *Appl. Math.*, 41(3):169–201, 1996.
- [40] J. Shen. Cucker-Smale flocking under hierarchical leadership. *SIAM J. Appl. Math.*, 68(3):694–719, 2007/08.
- [41] C. M. Topaz and A. L. Bertozzi. Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups. *SIAM J. Appl. Math.*, 65(1):152–174, 2004.
- [42] G. Toscani, C. Brugna, and S. Demichelis. Kinetic models for the trading of goods. *J. Stat. Phys.*, 151(3-4):549–566, 2013.
- [43] T. Vicsek, A. Czir’ok, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Schochet. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1226–9, 1995.